

№ 5 дәріс

Функция шегі

Нүктедегі функция шегінің Гейне және Коши анықтамалары. Бұл анықтамалардың тең мағыналылығы.

Айталық, \mathbb{R} нақты сандар жиынының белгілі бір E ішжиынында анықталған $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ функциясы берілген, ал a осы E жиынының шектік нүктесі болсын. Демек, a нүктесінің кез-келген $(a - \delta, a + \delta)$ маңайында (δ -маңайында) E жиынының шексіз көп нүктелері жатады, бірақ a нүктесі E жиынында жатпауы да мүмкін.

Функция шегінің Коши анықтамасы. b саны $x \rightarrow a$ -ға ұмтылғанда $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ функциясының шегі деп аталады, егер кез-келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta(\varepsilon)$ оң саны табылып,

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \quad (1)$$

шартын қанағаттандыратын барлық $x \in E$ үшін

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad (2)$$

теңсіздігі орындалса.

Егер осы шарттар орындалса, онда оны былай жазады:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b; \quad \lim_{x \rightarrow a, x \in E} f(x) = b; \quad \lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x) = b; \quad f(x) \rightarrow b, x \rightarrow a, x \in E$$

Бұл анықтаманы логикалық символика арқылы былай жазуға болады:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Егер x -ті a -ға ұмтылдырғанда $f(x)$ функциясы b -ға ұмтылмайтын болса, яғни $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b$ болса, онда белгілі бір ε оң саны үшін кез-келген δ оң саны арқылы

$0 < |x - a| < \delta$ және $|f(x) - b| \geq \varepsilon$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын $x \in E$ саны табылар

еді. Бұны кванторлар тілінде былай жазады:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b := \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E ((0 < |x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - b| \geq \varepsilon)).$$

Шектің бұл Коши анықтамасын кейде функция шегінің " $\varepsilon - \delta$ " тіліндегі анықтамасы деп те атайды.

Енді осы анықтамаға эквивалентті функция шегінің тізбектер тіліндегі Гейне анықтамасын келтірейік.

Функция шегінің Гейне анықтамасы. b саны $x \rightarrow a$ -ға ұмтылғанда $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ функциясының шегі деп аталады, егер a санына жинақталатын кез-келген $\{x_n\} \subset E (x_n \neq a)$ тізбегіне сәйкес функция мәндерінің $\{f(x_n)\}$ тізбегі b санына жинақталса.

Коши және Гейне анықтамаларының эквиваленттілігі. Айталық, b саны $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ функциясының $x \rightarrow a$ -ға ұмтылғандағы Коши анықтамасы бойынша шегі

болсын. Онда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in E ((0 <$$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon).$$

Енді $\{x_n\} \subset E(x_n \neq a)$ кез-келген a -ға ұмтылатын сандық тізбек болсын. Онда тізбек шегі анықтамасынан $\delta = \delta(\varepsilon)$ үшін N нөмірі табылып, барлық $n > N$ үшін $0 < |x_n - a| < \delta(\varepsilon)$ теңсіздігі орындалады. Ал $|f(x) - b| < \varepsilon$ шартынан $\{f(x_n)\}$ тізбегі үшін $n > N$ болғанда $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады, яғни $f(x_n) \rightarrow b$.

Сонымен, b саны x a -ға ұмтылғандағы $f(x)$ функциясының Гейне анықтамасы бойынша шегі болады.

Енді b саны $f(x)$ функциясының x -тің a -ға ұмтылғандағы Гейне мағынасындағы шегі болсын. Сонда b санының $f(x)$ функциясының Коши анықтамасы мағынасындағы шегі екенін көрсетейік. Керісінше, b саны x a -ға ұмтылғандағы $f(x)$ функциясының Коши анықтамасы мағынасындағы шегі емес деп

ұйғарайық, яғни

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E ((0 < |x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - b| \geq \varepsilon)).$$

Енді нөлге жинақталатын $\{\delta_n\}$, $(\delta_n > 0)$, тізбегін алайық. Онда $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta_n > 0 \exists x_n \in E (0 < |x_n - a| < \delta_n) \wedge (|f(x_n) - b| \geq \varepsilon)$. Демек, $0 < |x_n - a| < \delta_n$ теңсіздігінен x_n тізбегінің a -ға жинақталатынын көреміз, өйткені $\delta_n \rightarrow 0$, ал $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ теңсіздігінен $\{f(x_n)\}$ тізбегі b санына жинақталмайды. Бұл b санының a -ға ұмтылғанда $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ функциясының, Гейне анықтамасы бойынша, шегі

болатынына қайшылық. Эквиваленттік дәлелденді.

Бірнеше мысал келтірейік.

1. $f(x) = c$ - тұрақты функциясының a -ға ұмтылғандағы шегі

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c \quad (3)$$

екенін көрсетейік.

Шынында да, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon))$, мысалы, $\forall \varepsilon > 0$ саны үшін $\delta(\varepsilon) = 1$ десек болғаны. Онда

$$\forall x (0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) = 1 \Rightarrow |f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon).$$

2. Егер $a > 0$ болса, онда $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ үшін a^x көрсеткіштік функциясының

$x \rightarrow x_0$ ұмтылғандағы шегі a^{x_0} екенін, яғни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \quad (4)$$

болатынын көрсетейік.

Алдымен $a > 1$ жағдайын қарастырайық. Онда $0 < x < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын x үшін Бернуллі теңсіздігі көмегімен алынатын

$$0 < a^x - 1 < 2(a - 1)x \quad (5)$$

теңсіздігі орындалады. Шынында да, Бернуллі теңсіздігі бойынша

$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a - 1}{n}$. Сондықтан, $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын x үшін

$$a^x - 1 \leq a^{\frac{1}{n+1}} - 1 < \frac{a - 1}{n+1} = \frac{1}{n+1}(a - 1) < 2(a - 1)x$$

Егер $-1 < x < 0$ болса, онда

$$\left| a^{-x} - 1 \right| = 1 - a^{-x} = 1 - \frac{1}{a^x} = \frac{a^x - 1}{a^x} < a^{-x} - 1 < 2(a-1)|x|.$$

Демек, $a > 1$ және $0 < |x| < 1$ үшін

$$\left| a^x - 1 \right| < 2(a-1)|x|. \quad (6)$$

Енді (4) теңдікті дәлелдейік. Ол үшін $\left| a^x - a^{x_0} \right|$ айырымын былай түрлендіріп, жазайық

$$\begin{aligned}
 & \left| a^x - a^{x_0} \right| = a^{x-x_0} - 1 \cdot a^{x_0} < a^{x_0} \cdot 2(a-1) |x - x_0|. \\
 \text{Егер } \delta(\varepsilon) = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2a^{x_0}(a-1)}, 1 \right\} & \text{ деп алсақ, } |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ болғанда,} \\
 & \left| a^x - a^{x_0} \right| < \varepsilon
 \end{aligned}$$

жоғарыдағы теңсіздіктен

$$\left| a^x - a^{x_0} \right| < \varepsilon$$

теңсіздігін аламыз, яғни (4) теңдік $a > 1$ жағдайында дәлелденді.

Енді $0 < a < 1$ болса, онда жоғарыдағы теңсіздіктерде a орнына $\frac{1}{a}$ қойса болғаны, өйткені онда $1 > 1/a$. Сонымен, $0 < a < 1$ болғанда, $\delta(\varepsilon) = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2a^{-1}(a-1)}, 1 \right\}$.

3. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, x \in E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, функциясының шегі x нөлге ұмтылғанда нөлге тең

екенін көрсетейік, яғни

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Шынында да, $\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon$, егер $|x - 0| < \delta = \varepsilon$ болса.

Бұл мысалда функцияның анықталмаған нүктеде де шегінің бар болатынын көреміз, бұл шындығында шек анықтамасында ескерілген, өйткені $0 < |x - a|$ болуы керек.

Өзіндік маңызы бар тағы бір мысал келтірейік.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x \neq a \text{ болса,} \\ c, & \text{егер } x = a \text{ болса} \end{cases}$$

функциясының шегі $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, өйткені

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) = 1 \text{ және } 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) = 1 \Rightarrow |f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon.$$

Бұл мысалдан функцияның нүктедегі мәні мен сол нүктедегі шегі тең бола бермейтінін көреміз.

a нүктесінің маңайынан a нүктесінің өзін алып тастағанда пайда болатын маңайды a нүктесінің ойылған маңайы деп атайды. Егер $U^\delta(a)$ арқылы a нүктесінің δ маңайын белгілесек, онда ойылған δ маңайын $U^\delta(a)$ арқылы белгілейміз.

Сонымен, $U^\delta(a) := E \cap U^\delta(a)$, $U_E^\delta(a) := E \cap U^\delta(a)$ жиындарын a

нүктесінің E жиындағы сәйкес δ маңайы және δ ойылған маңайы деп айтамыз.

Жиынның шектік нүктесінің ойылған маңайының мынадай айқын екі қасиетін атап өтеміз:

1) ойылған маңай бос емес, яғни $U_E^\delta(a) \neq \emptyset$;

2) кез-келген екі ойылған маңай қиылысуында ойылған маңай бар, яғни

$$\forall U'_E(a) \forall U''_E(a) \exists U(a) \left(U(a) \subset U'_E(a) \cap U''_E(a) \right).$$

Егер b нүктесінің R жиынындағы ε маңайын $V_R^\varepsilon(b)$ арқылы белгілесек, онда

функция шегінің " $\varepsilon - \delta$ " тіліндегі Коши анықтамасын мына түрде жазуға болады:

$$\lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x) = b := \forall V_R(b) \exists U_E(a) (f(U_E(a)) \subset V_R(b)).$$

Бұдан егер b нүктесінің кез-келген ε маңайы $V_R^\varepsilon(b)$ үшін $f : E \rightarrow R$ бейнелеуінің $f(U_E^\delta(a))$ бейнесі толығымен $V_R^\varepsilon(b)$ маңайында жататын a нүктесінің

E жиынында ойылған δ маңайы $U_E^\delta(a)$ табылса, онда b саны $x \rightarrow a$ -ға E бойынша ұмтылғанда $f : E \rightarrow R$ функциясының шегі болады.

Сандық өстің кез-келген нүктесі маңайында әрқашан симметриялы маңай жататын болғандықтан функция шегінің анықтамасын мына түрде жазамыз:

$$\lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x) = b := \forall V_R(b) \exists U_E(a) (f(U_E(a)) \subset V_R(b)) \quad (7)$$

Жоғарыда келтірілген анықтамалардың барлығы өзара эквивалентті және әртүрлі функциялардың шегін есептеуде біресе біреуін, біресе басқа біреуін қолданған ыңғайлы болады. Мысалы, $f(x)$ функциясының b санынан ауытқуы белгілі бір

шамадан аспауы үшін x -тің a -дан ауытқуын көрсететін сандық бағалауларда " $\varepsilon - \delta$ " тіліндегі анықтама ыңғайлы да, ал сандық жиындарда анықталмаған жалпы функциялар шегі үшін (7) анықтама ыңғайлырақ.

5. Бүкіл сан өсінде анықталған

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

сигнум икс функциясының x нөлге ұмтылғандағы шегі жоқ. Оны көрсету үшін алдымен (7) анықтаманың керілеуін келтірейік:

$$\forall b \in R \exists V(b) \forall U(a) \exists x \in U(a) (f(x) \notin V(b)). \quad (8)$$

Бұл (8) анықтаманы біздің мысалға қолданғанда

$$\forall b \in R \exists V(b) \forall U(0) \exists x \in U(0) (\operatorname{sgn} x \notin V(b))$$

болар еді, яғни x нөлге ұмтылғандағы $\operatorname{sgn} x$ функциясының шегі болады дейтін b

санын алсақ, онда b белгілі бір маңайы үшін 0 нүктесінің кез-келген ойылған маңайынан $\operatorname{sgn} x \notin V(b)$ болатын x табылады.

Шынында да, $\operatorname{sgn} x$ мәні болатын $-1, 0, 1$ сандарының бірде бірі x нөлге

ұмтылғанда оның шегі бола алмайды, өйткені осы сандарды ұстамайтын b санының $V(b)$ маңайы бар, ал егер b саны осы үш санның -1 немесе 1 -ге тең болса, онда $\varepsilon = \frac{1}{2}$

деп b нүктесінің $V(b)$ маңайын алсақ, мұндай маңайға -1 және 1 нүктелерінің екеуі

бірдей жатпайды. Сондай

ақ, егер $b = 0$ болса, онда 0 нүктесінің

$U(0)$ маңайында

$f(x) = 1$ және $f(x) = -1$ болатын x
нүктесі бар, демек, $\exists x \in U(0)$

$(f(x) \notin V(b))$.